V A Area e Perimetro 2015 D. Zambon

**11 -2 – 2015**

*Gli alunni hanno costruito tre modelli:*

*n.1*



*n.2*

 

*n.3*



*Prova 1*

“Muovi” i tre modelli e per ciascuno scrivi le tue osservazioni su Area e Perimetro delle figure che si formano.

*Tempo impiegato circa 40 minuti.*

*Risultati*

*2 risposte accettabili*

*10 non rispondono alla domanda posta, osservano le figure che si formano*

*7 indicano stesso destino ad A e P*

*Difficoltà diffusa a giustificare; alcune giustificazioni incomprensibili*

*È come se rispondessero ad una domanda diversa.*

*1 riferimento al caso limite*

**18 – 2 – 2015**

*IR informa sui risultati della prima consegna e invita gli alunni a completare l’esposizione ( solo 3 hanno completato; tutti devono esaminare il modello n.3). Le osservazioni aggiunte sono dopo la data di oggi. Dopo un quarto d’ora inizia la discussione.*

*Risultati del completamento:*

*positivo 3 – incerto 10 – negativo 6*

IR: cominciamo ad esaminare un modello alla volta. Qualcuno vuole descrivere il modello n.1?

*Leo descrive come trovare il centro di un cartoncino, come disegnare al centro un segmento, poi forare gli estremi e passare uno spago che verrà annodato sul retro*

Leo: … se muovi con la penna si muove lo spago .. viene un tondo … *IR dice che si chiama ellisse e che verrà studiata in seguito.*

IR: Perché abbiamo scelto uno spago?

Nicola G.: se prendevi un elastico diventava più lungo …

IR: cosa accade quando muovo …

Carlotta: si formano tante figure isoperimetriche perché c’è lo spago. C’è un lato fisso perché è disegnato … *Alcuni dicono che si forma un triangolo isoscele …*

IR: quando un triangolo è isoscele?

Luca A.: se due lati sono uguali. *Alcuni dicono che è al centro.*

IR: Quando mi sposto dal centro cosa accade?

Leo: i lati sono diversi, quello che uno perde l’altro lo acquista.

IR: solo uno di voi ha osservato una posizione particolare …

Filippo: quando i lati sono sovrapposti. *Alcuni dicono che non c’è più la figura perché non ci sono più gli angoli. IR ricorda che è il triangolo degenere.*

IR: Osserviamo gli angoli …

Leo: quando i lati sono sovrapposti, due angoli diventano zero, uno di 180° … è la somma di tutti gli angoli! Ci sono figure speculari .. *IR fa osservare come l’ellisse ha due assi di simmetria.*

IR: cosa succede all’area?

Luca A.: cambia.

IR: come?

Alcuni: da cicciotta a sottilissima …

IR: quanto vale l’area nel caso degenere?

Molti: non c’è.

IR: perché al centro è massima? Da cosa dipende?

Martina: dall’altezza.

IR: e la base?

Luca A.: è sempre uguale *Si osserva che partendo dal centro, cambiando posizione l’altezza diminuisce fino al caso degenere …*

Nicola G.: qui non c’è più niente.

Leo: i due lati diversi devono essere superiori alla base …

IR: questa è la regola di costruibilità di un triangolo, altrimenti …

Alcuni: non si chiude.

IR: perché calcolo l’area di un triangolo facendo b×h:2?

Molti: o è la metà di un quadrato o di un rettangolo … *Si aggiunge anche la metà di un parallelogramma.*

IR: perché per il rettangolo faccio b×h? l’area a cosa si riferisce, con l’area cosa troviamo?

Molti: la superficie … *IR disegna un rettangolo alla lavagna e ne ricopre la superficie con quadratini unità …*

Leo: nella base ce ne stanno 4 e nell’altezza 3…

Filippo: basta allora b×h

IR: facciamo il punto: il P non cambia mai, l’A cambia e dipende dalla misura dell’altezza.

**25 – 2 – 2015**

*IR ricapitola ciò che è stato fatto, poi si riprende l’analisi del modello n.1*

IR: allora i triangoli che si formano sono tutti …

Luca: isosceli ..

Carissa: no, isoperimetrici.

IR: e l’area?

Molti: cambia perché cambia l’altezza.

IR: e la base?

Carlotta: è sempre la stessa.

IR: come varia l’altezza?

Leo: aumenta o diminuisce ..

IR: e l’area come cambia?

Leo: aumenta o diminuisce ..

IR: se l’altezza è 5 e poi diventa 10 cosa fa l’area?

Nicola G: raddoppia

IR: proviamo a calcolare …  *alla lavagna viene scritta una tabella h – A nella ipotesi di una base di 3 .. osservano che entrambe le grandezze aumentano o diminuiscono, se una raddoppia anche l’altra .. grandezze direttamente proporzionali.*

IR: ci sono situazioni in cui l’area non cambia?

Elisa: la simmetrica in basso …

Leo: anche a destra e sinistra … basta arrivare al triangolo degenere …

IR: l’area massima?

Nicola G: altezza massima.

IR: Area minima?

Alcuni: triangolo degenere con area zero, dipende dall’altezza zero …

IR: vediamo di individuare quali figure si formano.

Sofia: sono triangoli, partiamo dal massimo che è isoscele …

IR: può essere equilatero?

Alcuni: sì, se lo spago è lungo 21 cm *(La base è di 7 cm)*

IR: il triangolo equilatero è anche isoscele?

Carlotta: sì, perché due lati sono comunque uguali.

IR: se mi sposto dal centro?

Luca A: ottusangolo … anzi scaleno …

IR: ci sono gli ottusangoli?

Leo. Sì, dopo l’angolo retto …

IR: il triangolo rettangolo è il confine tra …

Alcuni: tra gli acutangoli e gli ottusangoli.

IR: quanti triangoli rettangoli?

Alcuni: sono 4 e gli isosceli due ..

IR: e acutangoli e ottusangoli?

Alcuni: infiniti.

Alcuni: i degenere sono due.

IR: se faccio scorrere il filo con la punta di una matita posso ottenere una curva, l’ellisse; si forma unendo tutti vertici, opposti alla base costante e fissa, di triangoli isoperimetrici. *Si giustifica il fatto che gli estremi della base costante sono detti fuochi; verrà in seguito fatta una prova pratica. Si discute sulla diversità delle unità di misura per calcolare area e perimetro: lineare e quadrata.*

IR: perché per il P serve una unità di misura lineare?

Alcuni: ha solo una dimensione … *si osserva che come unità di misura di superficie è stato scelto il quadrato unitario, perché più semplice …*

IR: il P è a una dimensione, l’area a due, in seguito esaminerete il volume che è a tre dimensioni … può qualche cosa essere a quattro dimensioni?

Leo: non esiste

IR: se io fossi a una dimensione non capirei neppure la seconda ….. siamo a tre dimensioni e fatichiamo a pensare a quattro dimensioni … *IR dà alcuni cenni sul passaggio da zero a più dimensioni utilizzando la traslazione di un oggetto.*

*Si passa al modello n.2*

IR: qualcuno me lo descriva … *Alcuni alunni lo fanno correttamente.* Cosa accade ad A e P?

Sofia: L’area, dal triangolo al trapezio al rettangolo cambia … no, no, non cambia!

IR: perché?

Sofia: qualsiasi figura è sempre la metà del quadrato …

IR: e il P?

Molti: non cambia …

**4 – 3 – 2015**

*IR ricapitola velocemente. Poi si passa all’esame del modello n.2.*

IR: visto che in prevalenza avete parlato delle figure riprendiamo da qui. Che tipo di figure si formano e quante di ogni tipo?

Molti: triangoli …

IR: di che tipo?

Molti: equilatero …

Joni: è isoscele …

Nicola G: è rettangolo e poi ci sono trapezi.

IR: quanti trapezi?

Alcuni: due … no non si possono contare, sono infiniti.

IR: e se giro? *Ruota il modello.*

Martina: è come un asse di simmetria ..

IR: anche per i trapezi?

Martina: non è un asse … *vengono fatte le verifiche con lo specchio per tutte le figure che si formano.*

Carlotta: per i trapezi con una rotazione combaciano *ha provato con una sagoma di carta a forma di trapezio.*

Alessandro: con una rotazione di 180°.

IR: ora ritorniamo al nostro quesito; perché l’area non cambia?

Alcuni: sono la metà del quadrato … lo provo con la simmetria o la rotazione.

IR: possiamo giustificarlo in altro modo? Supponiamo di non conoscere simmetria e rotazione …

Robi: lo dicono vedendo … *(basta guardare ….)*

 Nicola G: guardi il quadrato che lo contiene …

Alcuni: prendo il righello e misuro …

Alcuni: per il triangolo rettangolo non devo neanche misurare, confronto le dimensioni dei lati … *non è chiaro a cosa si stanno riferendo, se a A o P.*

*IR scrive alla lavagna le formule del calcolo dell’area dette dagli alunni.*

Carlotta: per il trapezio la somma delle basi è il lato del quadrato *(B+b)×h:2*  *diventa l×l:2*

Alcuni: per il triangolo *b×h:2 diventa l×l:2*

Altri: per il rettangolo *l:2×l è lo stesso di l×l:2*

**11 – 3 – 2015**

*IR ricapitola ciò che è stato fatto (modello n.2). Si riparte dalle formule di calcolo delle aree, e si osserva anche attraverso il modello*



*che le aree delle figure che si formano sono equivalenti.*

IR: cosa accade al perimetro?

Molti: cambia.

IR: se varia ci sarà un massimo e un minimo … *molti sono perplessi ..*

Joni: ma i pezzi sono sempre gli stessi …. *Anche Robi condivide … è necessario ribadire la differenza tra A e P. Si decide di fare i calcoli come verifica.*

IR: indichiamo il P del rettangolo ..

Alcuni: *l+l+1/2l+1/2l=3l*

IR: e il triangolo?

Alcuni: *l+l+d. Si confrontano l e d e gli alunni individuano che d>l di conseguenza 3l<2l+d … si discute anche sulla potenzialità dell’uso delle lettere (le formule) al posto delle misure.*

Nicola: così sei più sicuro che non ci sia l’errore di misurazione ….

IR: e i trapezi?

Alcuni: sono intermedi … *IR fa osservare come l’A e il P hanno destini propri e non comuni, per una stessa situazione … la percezione dell’area è più immediata di quella del perimetro …*

IR: perché accade questo?

Nicola G: il perimetro è più piccolo, cioè ha una sola dimensione …

Leo: l’aspetto che ha più dimensioni lo percepiamo meglio ..

Nicola G: il mondo, le nostre cosa sono tutte a tre dimensioni … *Si conclude che ciò che accade al perimetro è indipendente da ciò che accade all’area. IR mostra una diversa situazione, una cordicella tesa tra le dita*



*Si ottengono figure isoperimetriche, ma non equiestese … gli alunni colgono facilmente la situazione. IR mostra anche un rettangolo articolabile*



IR: cosa accade?

Molti: il P non cambia, i bastoncini sono sempre gli stessi … l’area dipende dall’altezza *(ad un vertice è fissato un filo a piombo)*

Alcuni: con lo spago modifico entrambe le dimensioni … *è necessario argomentare per capire che non c’è compensazione. Viene mostrato il modello*



*Gli alunni riconoscono le figure che si formano …*

Alcuni: cambiano area e perimetro.

**18 – 3 – 2015**

*IR ricapitola quanto fatto. Si evidenzia che il 1° e 2° modello presentano situazioni antitetiche.*

IR: passiamo al terzo modello; come è stato costruito?

Sofia: un cartoncino piegato a metà, ritagliato un quadrato … rifilata la sagoma quadrata per fare passare la puntina … un buco al centro e ho disegnato l’apotema …

Rocco: è metà del lato del quadrato.

IR: cos’è l’apotema?

Alcuni: è la distanza tra il centro e il lato.

Alcuni: è anche il raggio …

Carlotta: del cerchio che sta dentro …

IR: ci possono essere tanti cerchi che stanno dentro …

Nicola G: quello che tocca i lati del quadrato.

Rocco: che ha per diametro il lato del quadrato.

IR: si chiama cerchio inscritto. E poi c’è quello che sta fuori, circoscritto …

Alcuni: tocca gli angoli …

Alcuni: e il raggio è metà della diagonale.

Elisa: buchiamo gli estremi del segmento e facciamo passare il filo elastico.

IR: osserviamo le figure che si formano …

Nicola G: alla partenza un angolo nullo

Alcuni: ci sono solo due lati.

*IR mostra che con due soli lati, utilizzando due penne si possono costruire due angoli …*

Alcuni: uno concavo e uno convesso.

 

IR: se mi sposto verso B?

Sofia: triangoli.

IR: che triangoli?

Leo e Giudi: triangoli rettangoli …

Giudi: scaleni …

IR: tutti?

Alessandro: no, isoscele …

IR: quanti?

Alcuni: fino a B uno, fino ad A un altro … poi altri due …

Giada: sono otto *IR fa osservare anche con l’uso di uno specchio che le diagonali non funzionano da assi di simmetria e vale un solo asse mediamo, quello parallelo a BC.*

IR: continuiamo ..

Joni: scaleni fino al triangolo rettangolo.

IR: solo scaleni?

Nicola: equilatero ..

IR: sei sicuro? Come faccio a controllare senza misurare?*.*

Leo: nell’angolo retto … due lati sono uguali …

IR: perché non è equilatero?

Leo: il taglio è parallelo … due lati sono perpendicolari …

IR: il percorso non perpendicolare ….

Alcuni: è più lungo.

IR: Continuo …

Alcuni: scaleni ottusangoli e degenere … e dall’altra parte la stessa cosa.

IR: quante figure? *individuano infiniti tr. rettangoli, infiniti acutangoli, infiniti ottusangoli e quattro tr. Rettangoli isosceli …*

Elisa: infinito+infinito= infinito più grosso.

IR: è più grande?

Nicola P: è come 0+0=0

Joni: ma 1+1=2

Nicola G: non si può contare. *IR fa osservare come ciò che vale nel finito non vale nell’infinito; fa l’esempio dei pari in corrispondenza con i naturali …*

IR: nei naturali possiamo distinguere tra ..

Joni: tra pari e dispari …

IR: i pari sono la metà dei naturali … ma sono tanti quanti i naturali … infinito +infinito= infinito .. *sono perplessi non disorientati.*

IR: ora esaminiamo l’area e il perimetro … come hanno l’area?

Joni: cambia.

Alcuni: il minimo è zero ..

IR: da cosa dipende la variazione?

Elisa: dall’altezza. *Osservano cosa accade dalla partenza al vertice B.*

IR: continuando cambia l’altezza?

Nicola P: non cambia perché la base e il taglio sono paralleli.

**25 – 3- 2015**

*IR fa il punto della situazione e ricapitola le prime osservazioni sul terzo modello.*

IR: riprendiamo … cosa accade all’area?

Carlotta: cambia.

IR: come?

Leo. Nel degenere è minima.

IR: il massimo?

Sofia: quassù nel vertice …. *E indica il vertice B.*

IR: da B a C cosa accade? *Restano perplessi.* Come si calcola l’area di un triangolo?

Tutti: b×h:2

IR: la base è sempre la stessa e …

Alcuni: e l’altezza è sempre la stessa …

Sofia: perché il taglio è parallelo alla base.

IR: quando supero C?

Carlotta: l’altezza rimpicciolisce e l’area diminuisce … *Si ricapitola che da B a C non cambia e il massimo si raggiunge in B, dopo C diminuisce.*

IR: quanti triangoli hanno area massima?

Nicola G: infiniti.

IR: ora vediamo cosa accade al perimetro.

Molti: cambia, il filo è elastico …

IR: il minimo?

Roberto: quello più vicino all’apotema … *si apre una discussione sul fatto che avvicinandosi a due segmenti sovrapposti il perimetro diminuisce sempre … all’infinito …*

IR: e il massimo?

Leo: il caso degenere …

IR: controllate la tensione dell’elastico e osservate …

Leo: è quando raggiunge il vertice C.

Sofia: sì, è questo, perché se lo lascio scappa … *mostra come la puntina lasciata in C tende a ritornare su BC verso il triangolo isoscele. IR mostra il modello dei triangoli equivalenti. Raffaella lo osserva e descrive correttamente come è fatto.*

Elisa: hanno tutti la stessa area.

Rocco: Il perimetro no perché l’elastico tira.

Nicola T: se continui allungando il taglio i triangoli sono infiniti.

Robi: ad un certo punto si restringe …

IR: vanno a scomparire?

Leo: no, l’altezza è sempre uguale.

*IR fa riferimento al modello*



*Gli alunni affermano che cambia l’area perché cambia l’altezza.*

Nicola G: e cambia anche il perimetro.

IR: cosa accade se cambio la base?

Molti: cambia l’area e cambia anche il perimetro …

IR: scompare la figura?

Alcuni: no, cambia solo la base, l’altezza rimane … per scomparire la figura deve cambiare l’altezza … *si osserva che scompare se la base è nulla.*

**1 – 4 - 2015**

*IR ricapitola gli scopi dell’indagine: cosa accade ad area e perimetro delle figure che si formano nei tre modelli esaminati; viene distribuito il modello:*



IR: cosa rappresenta questo modello?

Carlotta: 1/4 del quadrato.

IR: cosa ottengo ruotando la parte colorata?

Joni: un quadrato, quadrilateri generici ..

Alcuni: un triangolo .. *argomentando riconoscono il triangolo rettangolo isoscele.*

IR: cosa succede all’area?

Nicola G: niente, non cambia.

IR: come faccio ad essere sicura?

Nicola G: ce ne stanno sempre quattro …

IR: come fai a stabilirlo?

Nicola G: li segni *… nel caso del quadrato indica di tracciare le mediane.*

IR: quando è nella posizione a triangolo rettangolo isoscele?

Nicola G: è sempre 1/4  *e Filippo indica di tracciare le diagonali …*

IR: nelle posizioni intermedie come facciamo?

Nicola G: non si può *fa riferimento a possibili segmenti da tracciare …*

Joni: gli assi di simmetria … no, non funziona ..

Alcuni: si ritaglia poi si incastra …

Nicola: calcolo l’area del quadrato e la divido per 4 … *IR fa notare che non è possibile partire dalla conclusione … si è partiti da 1/4 di superficie e si è arrivati a 1/4 di superficie, quindi deve mantenersi anche nelle posizioni intermedie. Gli alunni riconoscono che il modello è dello stesso tipo del n. 2.*

IR: potrei considerare una situazione che rappresenta 1/8?

Nicola G: sarebbe la stessa cosa.

IR: e il perimetro?

Molti: cambia. *Tutti assieme indicano il perimetro minimo del quadrato e massimo del triangolo rettangolo isoscele:*

*1/2l+1/2l+1/2l+1/2l=2l*

*1l+1/2d+1/2d=l+d*

Nicola G: la diagonale è più lunga del lato ..

IR: e i casi intermedi?

Carlotta e Nicola: più piccolo del triangolo e più grande del quadrato …

*Si passa al modello*



*Osservano che le asticciole sono uguali, IR mostra la versatilità del modello …*

Nicola: si possono ottenere tutte le figure …

Alcuni: non si può ottenere il deltoide

Alcuni: anche trapezi e il rombo … *si osservano attentamente tutte le possibilità.*

IR: cosa accade all’area?

Nicola G: cambia sempre.

IR: perché?

Alessandro: si allungano … cambia la base ..

IR: se lo giro dall’altra parte?

Molti: cambia l’altezza.

IR: possiamo dire che cambia una dimensione … dove si trova il massimo?

Robi: all’infinito.

IR: e il minimo?

Nicola G: quando si toccano i bastoncini …

IR: c’è area?

Rocco: no, non c’è.

IR: l’area minima si ha quando una dimensione tende a zero … *osservano che area e perimetro si comportano allo stesso modo.*

*Viene distribuito il modello*



*Nella versione con asticciole uguali e diverse.*

IR: cosa si ottiene se le asticciole sono uguali?

Joni: sicuramente i triangoli sono isosceli ..

Alcuni: ce n’è uno equilatero .. e uno rettangolo

IR: nell’altro caso?

Alcuni: tutti scaleni …

Rocco: ce ne sono due isosceli, uno rispetto ad una asticciola e uno con l’altra …

IR: ci sarà il triangolo rettangolo?

Alessandro: sì.

IR: e nel caso degenere?

Rocco: c’è un angolo di 180°.

IR: e tra 0 e 180 …

Alcuni: c’è anche 90°.

IR: cosa succede all’area?

Molti: cambia.

Rocco: cambia la base e l’altezza. *Osservano che nel caso degenere l’area è zero e poi aumenta per ritornare a zero …*

IR: e il perimetro?

Sofia: il minimo è segmenti sovrapposti, degenere è il massimo …

IR: quanto misura il perimetro nel caso degenere?

Robi: dipende dalle misure delle asticciole *e si fanno delle ipotesi ..*

IR: ci lasciamo con questa consegna “Quale, di tutti i triangoli che si formano, ha area massima e perché?”

**14 – 4 – 2015**

*Si ricapitola quanto fatto la volta precedente; si riprende il modello:*



Carlotta: il perimetro della forma quadrata è *2l …*

Elisa: della forma a triangolo è *l+d … molti affermano che la diagonale è maggiore del lato …*

Giada: è più grande il P del triangolo.

IR: e le forme intermedie?

Carlotta: hanno valori intermedi.

Leo: da *2l* a *l+d …*

*Si passa al modello*



*IR mostra le molteplici possibilità del modello …*

Leo: da trapezio a triangolo quando la base diventa nulla …

IR: nel movimento cosa accade ad A e P?

Rocco: aumenta l’A ma anche il P …

IR: da cosa dipende l’aumento?

Rocco: dagli elastici … *Si osserva che il lato in elastico può essere sia base che altezza … si parla di dimensione ..*

Alcuni: dalla variazione di una dimensione. *Si precisa cosa si intende per dimensione … i segmenti hanno solo una dimensione …*

Joni: il cubo ne ha tre

IR: il punto?

Leo: zero.

IR: e il P?

Leo: dipende sempre dalla variazione o della base o dell’ altezza .. *Vengono mostrati alcuni calcoli nella ipotesi che i legnetti misurino 10 cm.*

*Dimensione variabile A P*

 *5 50 30*

 *10 100 40*

 *15 150* *50*

IR: come aumenta l’area al variare di una dimensione? *C’è confusione …*

IR: se da 5 passo a dieci …

Nicola: è il doppio … sì, l’area è il doppio.

IR: e per il P?

Joni: va avanti di 10 … si comportano in modo diverso.

*Si riprende il modello*



*Nelle versioni ad asticciole uguali e diverse.*

IR: quali figure si formano con i legnetti uguali?

Alcuni: triangoli isosceli ..

Luca: tra cui un triangolo rettangolo.

Carlotta: e un equilatero.

IR: A e P?

Alessandro: variano tutti e due

IR: P massimo?

Leo: nel triangolo degenere … il minimo nei due lati sovrapposti ..

IR: l’A?

Alcuni: aumenta, aumenta poi diminuisce ..

IR: e l’A massima?

Rocco: quando l’angolo è retto … *altri concordano e fanno riferimento a metà del quadrato …*

IR: il minimo?

Rocco: all’inizio e alla fine con il modello con i legnetti diversi *si apre una discussione sulla infinità delle figure in questi modelli e l’infinità delle figure del modello precedente.*

Alcuni: è lo stesso infinito perché l’infinito è sempre uguale. *Si apre una discussione sugli infiniti.*

*Si discute anche se dividendo a metà una quantità sempre più piccola ad un certo punto si annulla.* Leo: non c’è fine, posso sempre dividere a metà …

Alcuni: la metà di qualche cosa è qualche cosa.

*IR disegna due segmenti, uno doppio dell’altro.*

IR: contengono gli stessi punti? *Alcuni sono perplessi …*

Alessandro, Carlotta, Leo: sono uguali ..

IR: come fate a convincere …

Leo: divido a metà il più grande poi dico infinito + infinito è sicuramente infinito … *Si apre la discussione sul “sicuramente” poi IR mostra la corrispondenza biunivoca tra tutti i punti dell’uno e dell’altro segmento.*

*Viene mostrato infine il modello*



*Riconoscono correttamente cosa succede e dove si trovano i massimi e minimi per A e P.*